Een derdegraadsfunctie

14 maximumscore 3

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van f ligt punt (y, x) op de grafiek van de inverse van f, dus er geldt) $x = -2 + \sqrt[3]{y-1}$ — 1
- Dus $x + 2 = \sqrt[3]{y-1}$, dus $(x+2)^3 = y - 1$, dus $y = (x+2)^3 + 1$ — 1
- Dit is gelijk aan $(x+2)^2 \cdot (x+2) + 1 = \left(x^2 + 4x + 4\right) \cdot (x+2) + 1 = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ ($= f(x)$, dus geldt inderdaad $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$) — 1

of

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van de inverse van f ligt punt (y, x) op de grafiek van f, dus er geldt) $x = y^3 + 6y^2 + 12y + 9$ — 1
- $(y+2)^3 = (y+2)^2(y+2) = \left(y^2 + 4y + 4\right)(y+2) = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$, dus $x = (y+2)^3 + 1$ — 1
- Herleiden geeft $y = -2 + \sqrt[3]{x-1}$ (dus geldt inderdaad $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$) — 1

of

- $f\left(f^{\text{inv}}(x)\right) = \left(-2 + \sqrt[3]{x-1}\right)^3 + 6 \cdot \left(-2 + \sqrt[3]{x-1}\right)^2 + 12 \cdot \left(-2 + \sqrt[3]{x-1}\right) + 9$ — 1
- $\left(-2 + \sqrt[3]{x-1}\right)^3 = -8 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{x-1} + 3 \cdot -2 \cdot \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2 + x - 1$ — 1
- De rest van de herleiding van $f\left(f^{\text{inv}}(x)\right)$ tot x (dus geldt inderdaad $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$) — 1

15 maximumscore 3

- De ondergrens van de integraal is 0, de bovengrens is $f(0) = 9$ — 1
- De inhoud van het omwentelingslichaam is gelijk aan $\pi \cdot \int_0^9 \left(-2 + \sqrt[3]{x-1}\right)^2 \, dx$ — 1
- De inhoud is 33,9 — 1

16 **maximumscore 6**

- $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$ 1
- Voor P geldt $3x^2 + 12x + 12 = 0$; dit geeft $(x+2)^2 = 0$, dus $x = -2$ 1
- Voor Q geldt (vanwege de symmetrie in de lijn met vergelijking $y = x$) $y = -2$ 1
- ($f(-2) = 1$, dus) $P(-2, 1)$ en $Q(1, -2)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q is $(\frac{-2-1}{1--2} =) -1$ 1
- De y-coördinaat van S is dus $1 + 2 \cdot -1 = -1$ 1

of

- $f^{\text{inv}}{}'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}$ 1
- (Als $x \to 1$, dan $f^{\text{inv}}{}'(x) \to \infty$, dus) de grafiek van $f^{\text{inv}}(x)$ heeft een verticale raaklijn als $x = 1$ (en dit is dus de x-coördinaat van Q) 1
- Voor P geldt (vanwege de symmetrie in de lijn met vergelijking $y = x$) $y = 1$ 1
- ($f^{\text{inv}}(1) = -2$, dus) $Q(1, -2)$ en $P(-2, 1)$ 1
- (Omdat Q het spiegelbeeld is van P in de lijn met vergelijking $y = x$, geldt) de richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q is -1 1
- De y-coördinaat van S is dus $1 + 2 \cdot -1 = -1$ 1

of

- $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$ 1
- Voor P geldt $3x^2 + 12x + 12 = 0$; dit geeft $(x+2)^2 = 0$, dus $x = -2$ 1
- $f^{\text{inv}}{}'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}$ 1
- ($f(-2) = 1$, dus) $P(-2, 1)$ en (als $x \to 1$, dan $f^{\text{inv}}{}'(x) \to \infty$, dus) de grafiek van $f^{\text{inv}}(x)$ heeft een verticale raaklijn als $x = 1$ (en dit is dus de x-coördinaat van Q); ($f^{\text{inv}}(1) = -2$, dus) $Q(1, -2)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q is $(\frac{-2-1}{1--2} =) -1$ 1
- De y-coördinaat van S is dus $1 + 2 \cdot -1 = -1$ 1